

INVALIDATION DE LA THEORIE DU TRANSFINI

Thèse remise à l'Académie des sciences et droits déposés.

Qui accrédite par principe le discours autorisé devient le jouet servile de la mystification consensuelle, l'entremetteur de la contrevérité établie, et finit chancre d'un obscurantisme dont la science n'est pas exempte.

I) INVALIDATION DE L'ARGUMENT DE CANTOR APPLIQUÉ AU DÉNOMBREMENT DES NOMBRES RÉELS DE L'INTERVALLE [0, 1]

I.1) RAPPEL DE L'ARGUMENT DE CANTOR

I.2) PARADOXE DE L'INDÉNOMBRABILITÉ DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES ENTIERS : ERREUR LOGIQUE FONDAMENTALE DU RAISONNEMENT DE CANTOR

I.3) ERREUR CONCOMITANTE INDUITE PAR L'ABSENCE DE PRISE EN COMPTE DE LA DOUBLE ÉCRITURE PROPRE / IMPROPRE DE CERTAINS NOMBRES RATIONNELS RELATIVEMENT À LA BASE DE NUMÉRATION COURANTE.

II) DÉNOMBREMENT FORMEL DES REELS DE L'INTERVALLE [0, 1]

III) IDENTITÉ DES CARDINAUX DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES RATIONNELS ET DE CELUI DES NOMBRES IRRATIONNELS. IDENTITÉ INDUITE DE CELUI DES NOMBRES REELS ET DE CELUI DES NOMBRES ENTIERS.

IV) PARADOXE DE LA «SOUS-DÉNOMBRABILITÉ» DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES PREMIERS. INVALIDATION DE LA CONSISTANCE DE LA NOTION D'EQUIPOTENCE COMME CRITÈRE DE COMPARAISON DES CARDINAUX TRANSFINIS. IDENTITÉ DU CARDINAL DE \aleph AVEC CELUI DE L'ENSEMBLE DE SES PARTIES.

V) INVALIDATION DE L'ARGUMENT DIAGONAL DE CANTOR DANS LE CAS DU DENOMBREMENT DES SUITES DE LANCÉS SUCCESSIFS D'UNE PIECE DE MONNAIE. EXPLICATION CONNEXE DU PARADOXE DE SAINT-PETERSBOURG

I) INVALIDATION DE L'ARGUMENT DE CANTOR APPLIQUÉ AU DÉNOMBREMENT DES NOMBRES RÉELS DE L'INTERVALLE [0, 1]

I.1) RAPPEL DE L'ARGUMENT DE CANTOR

Objet : Démontrer que le cardinal des nombres réels est supérieur à celui de l'ensemble des nombres entiers, c'est-à-dire en termes courants qu'il y a plus de nombres réels que de nombres entiers, et, pour ce faire, démontrer qu'il y a déjà plus de réels dans l'intervalle [0, 1] qu'il n'y a d'entiers.

Pour ce faire, comme il est possible par la pensée de noter tous les nombres réels de l'intervalle $[0, 1]$ sous la forme d'un tableau du type :

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$...	$a_{1,i}$...	$a_{1,n}$...
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$...	$a_{2,i}$...	$a_{2,n}$...
.						
$a_{i,1}$	$a_{i,2}$...	$a_{i,i}$...	$a_{i,n}$...
.						
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$...	$a_{n,i}$...	$a_{n,n}$...
.						

Tableau au sein duquel $a_{i,j}$ désigne la $j^{\text{ème}}$ décimale du nombre i , nombre, qui comme tous les autres nombres du tableau a été placé sur une ligne i arbitraire.

Bien, maintenant, il apparaît que si l'on considère le nombre $B = 0, b_1 b_2 \dots b_i \dots b_n \dots$ avec $\forall i b_i = a_{i,i}$

Et le nombre $D = 0, d_1 d_2 \dots d_i \dots d_n \dots$ tel que, par exemple, $\forall i d_i = 7$ si $b_i \neq 7$ et $d_i = 5$ si $b_i = 7$

Comme ces deux nombres diffèrent par leur chiffre diagonal, puisqu'on ne peut pas avoir $b_i = a_{i,i} = d_i \neq a_{i,i}$, on en déduit qu'à unité minimum près le cardinal de l'ensemble des nombres réels est effectivement supérieur à celui des nombres entiers... sous seule réserve — bien entendu ! — de faire preuve d'une totale ignorance des théorèmes fondamentaux relatifs à l'écriture des nombres : il faut un minimum !

A ce stade, on opte pour retarder la contre-argumentation, à dessein d'introduire le minimum de jargon et de notions nécessaires à la compréhension au débat.

Rappels des notions élémentaires de la théorie du transfini :

Notation 1 : en note par **Card(E)** le cardinal d'un l'ensemble **E**, c'est-à-dire son nombre d'éléments quand celui-ci est fini. Le cas des cardinaux des ensembles non finis d'éléments est l'objet du présent débat.

Notation 2 : On note le cardinal de l'ensemble des entiers \mathbb{N} par **Card (N) = \aleph_0**

\aleph_0 se lit Aleph 0 : Aleph est la première lettre des alphabets arabe, aramaic et hébreux (Wikipédia) ; pour Cantor, il s'agit de la lettre hébraïque.

Hypothèses :

- a) \aleph_0 est le plus petit des cardinaux transfinis (\sim infinis comparables entre eux).
- b) Le cardinal \aleph_1 de \mathbb{R} est égal au cardinal de l'ensemble des parties de \mathbb{N} : **Card (\mathbb{R}) = $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$**
- c) Les cardinaux transfinis sont liés par la relation $\forall i \aleph_{i+1} = 2^{\aleph_i} = \aleph_i^{\aleph_i} = \aleph_i^{\aleph_i} = \aleph_i! > \aleph_i$
- d) Hypothèse du continu : \aleph_1 est le plus petit des cardinaux transfinis supérieur à \aleph_0 — autrement dit, il n'y a pas de cardinal transfini intermédiaire entre les deux.

Vocabulaire : quand le cardinal d'un ensemble est supérieur à celui des nombres entiers, on dit qu'il n'est pas possible de dénombrer les éléments de cet ensemble, ou bien encore que cet ensemble est indénombrable.

I.2) PARADOXE DE L'INDÉNOMBRABILITÉ DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES ENTIERS : ERREUR LOGIQUE FONDAMENTALE DU RAISONNEMENT DE CANTOR

Rappel préliminaire profitable (niveau communal) : Tout nombre dispose d'un **numéral** qui correspond à son écriture symbolique en tant que signifiant. Au sens premier du terme, son **cardinal** correspond à son signifié en tant que valeur servant à quantifier un nombre d'objets (**3** pommes) ou une mesure continue (« haut comme **3** pommes »). Enfin, dans « il est le **3^{em}** de sa classe », le **3** est un **ordinal**.

Dans sa démonstration Cantor ne comptabilise absolument pas des nombres (cardinaux) mais des écritures de nombres (numéraux) ... et comme ni lui ni ses partisans ne connaissent la théorie en matière d'écriture des nombres, ils commettent bourde sur bourde.

LE PARADOXE PRIMORDIAL

Jeu d'écriture contre jeu d'écriture : On peut tout à fait choisir d'inverser la convention d'écriture des nombres entiers, de telle sorte que désormais le chiffre des unités se trouve à gauche du numéral, le chiffre des dizaines à sa droite, le chiffre des centaines à la droite de ce dernier etc.... et, s'il y a lieu on complète l'écriture ainsi obtenue à droite par autant de zéros que l'exige l'étape courante du raisonnement qu'on est en train d'entreprendre.

Ex : l'écriture <**123 456**> devient <**654 231 {000 000 ...}**>

Ensuite, on remplit le tableau de Cantor avec les écritures correspondantes des entiers énumérés dans leur ordre naturels, en procédant par récurrence : tableau **1×1**, **2×2**, etc.

Pour **n = 1** : le tableau comporte **1** ligne et **1** colonne : **a_{1,1} = 0** ; Le nombre diagonal **D = 7** ne figure pas dans le tableau ; Son ordre de grandeur est **10ⁿ = 10**.

Pour **n = 2** : **00 D = 77 ~ 10² = 100**
 10

Pour **n = 3** **000 D = 777 ~ 10³ = 1000**
 100
 200

Pour **n = i** quelconque, aussi grand que l'on veut, le nombre diagonal **D = $\sum_{j=0}^{n-1} 7 \cdot 10^j$** n'est pas dans le tableau, et son ordre de grandeur est **10ⁱ** : Il est équivalent pour **n** suffisamment grand à **2ⁿ**.

CONCLUSION : L'ENSEMBLE N DES NOMBRES ENTIERS EST INDÉNOMBRABLE ET SON CARDINAL EST ÉGAL À CELUI DE L'ENSEMBLE DE SES PARTIES !

LA DÉMONSTRATION DE CANTOR EST UNE TAUTOLOGIE DE LA FORME FAUX \Rightarrow FAUX

QUIZ :

Combien de chiffres pertinents faut-il au maximum pour noter en mètres une distance inférieure au kilomètre ?

A : 1000

B : 3

Combien de chiffres pertinents faut-il au maximum derrière la virgule pour noter une graduation millimétrique ?

A : 1000

B : 3

RAPPELS POUR LE MOINS OPPORTUN

THÉORÈME :

Dans une base de numération **b** les nombres compris entre **0** et **$b^n - 1$** s'écrivent au plus avec **n** chiffres.

En effet une écriture du type $a_n a_{n-1} \dots a_i a_{i-1} a_2 a_1$ avec a_i pouvant prendre **b** valeurs comprise entre **0** et **b-1** peut à son tour prendre **b^n** valeurs puisqu'il y a **n** chiffres.

CONSÉQUENCE :

Dans une base de numération **b** il faut au plus **n** chiffres derrière la virgule pour noter un nombre avec une précision de **b^{-n}** .

Puisqu'en multipliant le nombre considéré par **b^n** , on obtient un entier auquel s'applique le théorème précédent

CONSÉQUENCE SUR LE RAISONNEMENT DE CANTOR

Pour remplir un tableau avec les millimètres d'un mètre il faut **1000** lignes pour seulement **3** colonnes, et, là comme la diagonale ne comporte plus que **3** chiffres et que tous les nombres de **3** chiffres figurent dans le tableau quel que soit l'ordre choisi pour les énumérer, le nombre diagonal **y** est nécessairement sous forme de ligne : Dans le cas général la pertinence du raisonnement exige que le nombre de colonnes soit en rapport logarithmique avec celui des lignes. Et donc ::

LA DEMONSTRATION DE CANTOR EST NULLE ET NON AVENUE

I.3) ERREUR CONCOMITANTE INDUITE PAR L'ABSENCE DE PRISE EN COMPTE DE LA DOUBLE ÉCRITURE PROPRE / IMPROPRE DE CERTAINS NOMBRES RATIONNELS RELATIVEMENT À LA BASE DE NUMÉRATION COURANTE.

Rappel : Relativement à une base de numération b donnée, un nombre rationnel peut disposer d'une écriture dite propre qui comporte un nombre de chiffres significatifs fini derrière la virgule, et d'une écriture dite impropre qui elle n'est pas finie.

Ex : $1 = 0,999\ 999 \dots$

En effet, en posant $x = 0,999\ 999 \dots$, il vient $10x = 9,999\ 999 \dots = 9 + x$, d'où $x = 1$

Notons par ailleurs que sur une machine à calculer standard on a : $1 \div 3 \times 3 = 0,999\ 999 \dots$ car la division par 3 donne $0,333\ 333 \dots$ ce qui même avec une infinité 3 ne permet pas de retomber sur 1 un multipliant par 3.

Pour qu'un nombre rationnel ait une écriture finie, il faut que les diviseurs premiers du dénominateur de la fraction irréductible qui permet d'évaluer ce nombre fassent partie des diviseurs premiers de la base de numération, c'est-à-dire par exemple qu'en base $10 = 2 \times 5$, ce diviseur ne peut être un multiple que de 2 ou de 5 à l'exclusion de tout autre facteur premier :

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{1}{5} = 0,2 \quad \frac{1}{10} = 0,1 \quad \frac{1}{25} = 0,04$$

En ce cas, si on ôte 1 au dernier chiffre de l'écriture, puis si on la complète droite par une infinité de décimales égales à au prédécesseur $b-1$ de la base, c'est-à-dire par exemple 9 en base 10, on obtient l'écriture impropre du nombre considéré.

$$\text{Ici : } \frac{1}{2} = 0,499\ 999 \dots \quad \frac{1}{5} = 0,199\ 99 \dots \quad \frac{1}{10} = 0,099\ 999 \dots \quad \frac{1}{25} = 0,039\ 999 \dots$$

Que se passe-t-il si dans le cadre de la démonstration de Cantor, on pose comme nouvelle convention :

$$d_i = 9 \text{ si } b_i \neq 9 \text{ et } d_i = 8 \text{ si } b_i = 9$$

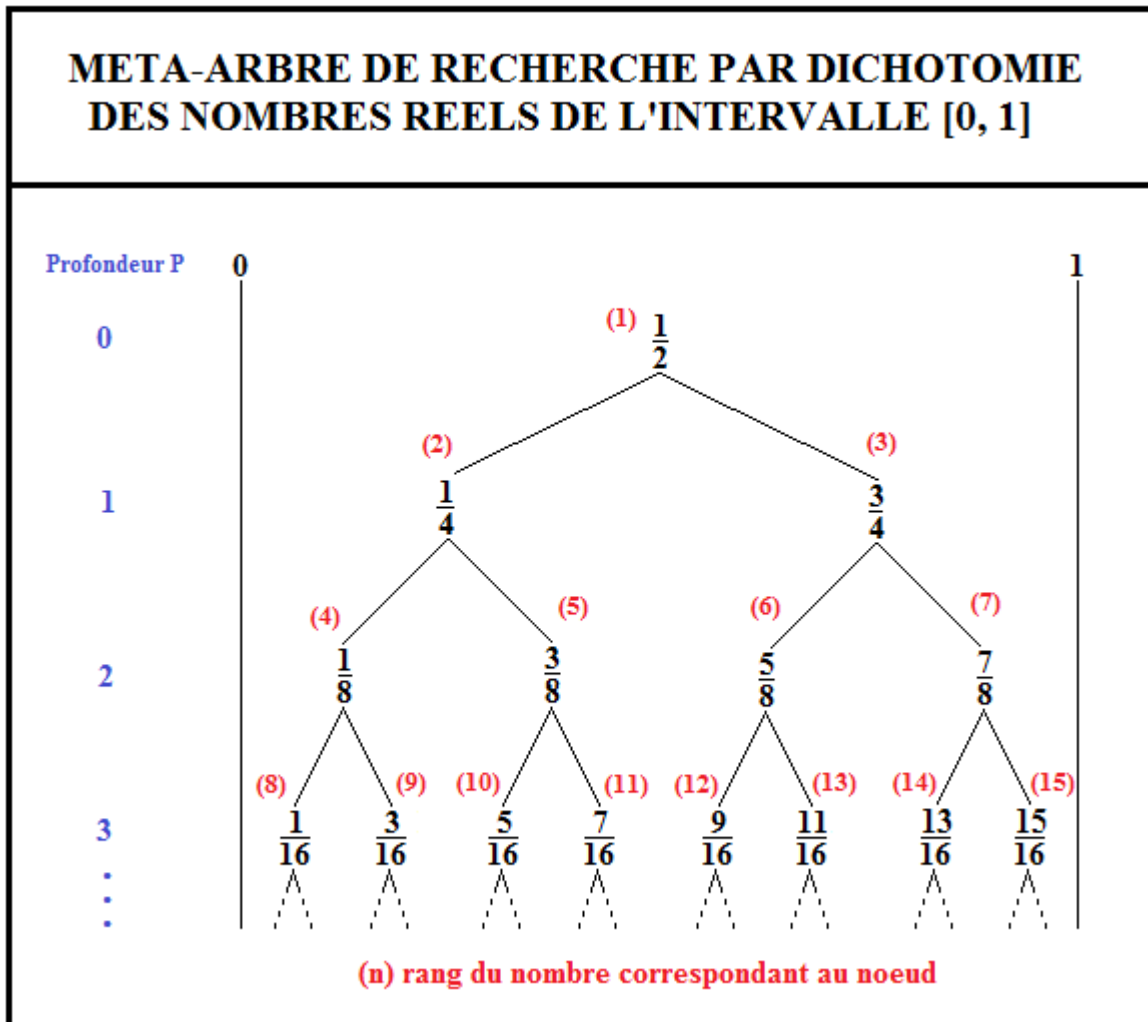
Cela ne marche plus : En effet, si l'on place le nombre $\{0,\}900\ 000 \dots$ sur la première ligne et si on s'arrange pour qu'aucun chiffre diagonal en dehors du premier ne soit égal à 9, le nombre diagonal est alors $D = \{0,\}899\ 999 \dots = \{0,\}900\ 000 \dots$

Or, il se trouve que si l'on raisonne en base 2 on ne dispose plus que d'une seule convention pertinente de substitution des chiffres de la diagonale, c'est-à-dire : $d_i = 1$ si $b_i \neq 1$ et $d_i = 0$ si $b_i = 1$, et là **comme la loi générale finit toujours par l'emporter sur la loi particulière**, elle conduit à un cas similaire au précédent.

Dans la mesure où le tableau que l'on obtient après énumération des nombres de l'intervalle $[0, 1]$ selon la méthode décrite au paragraphe suivant illustre l'affirmation précédente, on invite à s'y référer.

II) DÉNOMBREMENT FORMEL DES REELS DE L'INTERVALLE [0, 1]

Pour énumérer les nombres réels de l'intervalle [0,1] dans un ordre, sinon naturel, tout au moins convenable et formel, il suffit numéroté les sommets des sous-arbres d'un méta-arbre de recherche par dichotomie des nombres de cet intervalle, comme illustré ci-dessous.



Le rang respectif des nœuds est noté en rouge et leur valeur un noir.

Expression formelle : Pour un rang n donné, si on désigne par $p = E(\log_2 n)$ la partie entière du logarithme en base 2 de n (c'est à dire la profondeur dans l'arbre notée en bleu), on a $x_n = 2^{-p} (n - p - \frac{1}{2})$

En écriture binaire, aller à gauche dans l'arbre revient à remplacer le dernier 1 de l'écriture par la séquence 01 et aller à droite à ajouter un 1 à l'écriture.

$$\frac{1}{2} \rightarrow 0, 1 \quad \frac{3}{4} \rightarrow 0, 11 \quad \frac{5}{8} \rightarrow 0, 101 \quad \frac{9}{16} \rightarrow 0, 01001 \text{ etc....}$$

Et donc, toutes les écritures possibles des nombres de l'intervalle peuvent être atteintes, sans crainte du démenti d'un nouveau Cantor. Il y a donc bijection entre \mathbb{N} et l'ensemble des écritures des réels de l'intervalle $[0, 1]$. En effet, la profondeur dans l'arbre correspond à la précision, autrement dit au nombre de chiffres derrière la virgule, et compte tenu de ce qui a été déjà dit, l'ordre du nombre de sommets de l'arbre est $2^{\log_2 \aleph_0} = \aleph_0$ et non 2^{\aleph_0} , et donc le cardinal de \mathbb{R} est au plus égal à celui de \mathbb{N} : l'identité de ces deux cardinaux sera formellement redémontrée de manière directe au paragraphe suivant.

L'application $n \rightarrow x_n$ est une règle de production des points de $[0, 1]$ non bijective, car pour un point quelconque z de l'intervalle $[0, 1]$, il n'existe pas en règle général un n fini qui soit tel $x_n = z$, ce qui exclue la possibilité de définir une bijection inverse. (NB : chaque point peut être atteint de diverses manières en tant que limite)

Théorème : Il est impossible de définir une bijection entre un ensemble discontinu et un ensemble continu.

Démonstration : Soit I un intervalle continu. Quelle que soit la méthode de dénombrement utilisée, méthode que l'on assimile à une application F de \mathbb{N} dans I , il est impossible de faire en sorte que le rang de tous les points de I de valeur fini dispose d'un rang fini dans \mathbb{N} dans la mesure où l'ordre naturel, s'il était réalisable, ne saurait bien évidemment pas aboutir en ce sens, et, où, les permutations de cet ordre ne mèneraient non plus à rien car elles reviendraient à rendre finis les rangs des uns au détriments de ceux des autres. Si F était bijective, elle aurait une bijection inverse laquelle dans ces conditions se devrait d'associer des valeurs finis à des valeurs qui ne le sont pas, ce qui est absurde.

CONSEQUENCE FONDAMENTALE : Comme on sait qu'il est toujours possible de définir une bijection entre \mathbb{N} et l'un de ses sous / sur ensemble infini, **\mathbb{N} ne saurait être en aucun cas un sous ensemble de \mathbb{R} .**

Hors convention, soit on qualifie le réel $\langle 1 \rangle$ de réel holographe (du grec *ὅλος*, *hólos* ~ entier) \rightarrow qui s'écrit comme un entier ; Soit on le note avec un point : $\langle 1. \rangle$ Dans le même esprit, il est possible de qualifier les rationnels de diophantiens quand on souhaite insister sur le fait que dans le contexte courant ils sont des fractions entières et non pas des réels algébrique.

3 entier est un nombre discret qui dispose d'un successeur. 3 réel est un nombre limite au sein d'un continuum numérique :

Comprenne qui pourra !

En binaire, le tableau de Cantor correspondant à cet ordre est le suivant :

$\frac{1}{2}$	1	0 0 0 0 0 0 ...
$\frac{1}{4}$	0 1	0 0 0 0 0 ...
$\frac{3}{4}$	1 1	0 0 0 0 0 ...
$\frac{1}{8}$	0 0 1	0 0 0 0 ...
$\frac{3}{8}$	0 1 1	0 0 0 0 ...
	.	

Le nombre diagonal D est $\frac{1}{4}$ noté sous forme impropre : $\{0,\} 001 111 \dots$: Il figure sous forme propre dans la 2^{ème} ligne du tableau. Et donc **ce tableau constitue énonce un contre-exemple de celui de Cantor.**

III) IDENTITÉ DES CARDINAUX DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES RATIONNELS ET DE CELUI DES NOMBRES IRRATIONNELS. IDENTITÉ INDUITE DE CELUI DES NOMBRES REELS ET DE CELUI DES NOMBRES ENTIERS.

Notation : dans tout ce qui suit $E(x)$ désigne la partie entière du réel x .

Rappel : On dit de deux ensembles qu'ils sont équipotents s'il est possible de définir une bijection de l'un dans l'autre. En ce cas le transfini considère que les cardinaux de ces deux ensembles sont égaux. Si l'absence de pertinence de ce critère pour démontrer l'inégalité de deux cardinaux transfinis fait l'objet du paragraphe suivant, ici on l'utilise de manière non contradictoire puisqu'on est dans le cas de l'égalité des ensembles.

1) Démontrons tout d'abord l'égalité : $\text{Card}(\mathbb{Q}) = \text{Card}(\mathbb{Q}^+) = \text{Card}(\mathbb{N})$

Pour ce, démontrons préalablement l'égalité : $\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{N}^2)$

C'est simple ; il suffit d'énumérer les couples de \mathbb{N}^2 de la manière suivante :

$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0) \dots$
etc.... Soit de manière formelle :

Rang $(a, b) = a + \frac{S(S+1)}{2}$ avec $S = a + b$ rang comptabilisé à partir de 0

Au rang n correspond le couple (a, b) qui est tel que

En posant : $m = \frac{E(\sqrt{8n+1})-1}{2}$ et $p = \frac{m(m+1)}{2}$ on ait $a = n + p$ et $b = m - a$

La fonction rang est donc bien une bijection de \mathbb{N} dans \mathbb{N}^2 et par suite les cardinaux de ces deux ensembles sont égaux au sens du transfini, puisqu'ils sont équipotents.

Les nombres rationnels sont au plus aussi nombreux que les couples de \mathbb{N}^2 puisqu'ils peuvent s'écrire sous la forme $q = \frac{n}{m}$ où n et m sont des entiers et ceux qui parmi eux peuvent s'écrire sous la forme $q = \frac{n}{1} = n$ sont exactement aussi nombreux que les entiers.

Il suit l'inégalité $\text{Card}(\mathbb{N}) \leq \text{Card}(\mathbb{Q}^+) \leq \text{Card}(\mathbb{N}^2)$ et comme $\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{N}^2)$ on a bien :

$$\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{Q}^+) = \text{Card}(\mathbb{Q}) \quad \text{Ce qu'il fallait démontrer}$$

2) Montrons maintenant que les cardinaux de l'ensemble \mathbb{Q}^+ des nombres rationnel positifs et de l'ensemble $\overline{\mathbb{Q}}^+$ des irrationnels positifs sont égaux au sens du transfini.

Pré-théorème 1 :

Si p et q sont deux nombres rationnels distincts ordonnés dans cet ordre il existe au moins un nombre irrationnel r qui est tel que l'inégalité : $p < r < q$ soit respectée.

Démonstration : Pour $p < q$ nombres rationnels donnés le nombre irrationnel r défini par $r = p + (q - p) \frac{\sqrt{2}}{2}$ est bien tel que $p < r < q$

Pré-théorème 2 :

Si r et s sont deux nombres irrationnels distincts ordonnés dans cet ordre il existe au moins un nombre rationnel p qui est tel que l'inégalité : $r < p < s$ soit respectée.

Démonstration :

1^{er} cas : Si $s - r \geq 1$ alors $p = E(s)$ convient trivialement

2^{èm} cas : Si $s - r < 1$ alors il suffit de se ramener au premier cas de la manière suivante

Le nombre $t = \frac{1}{s-r}$ est un nombre irrationnel supérieur à 1

Le nombre $n = E(t)$ est supérieur à 1

Les nombres $u = n \times r$ et $v = n \times s$ sont deux irrationnels tels que $(v - u) \geq 1$ et donc $u < m = E(v) < v$

En dilatant en sens inverse et on a : $s < p = \frac{m}{n} < t$

p convient comme intermédiaire

Ex : $r = e$ $s = \pi$ $t \approx 2,362$ $n = 2$ $v = 2 \times \pi$ $m = 6$ $u < 6 < v$ $e < 3 < \pi$

$r = \sqrt{2}$ $s = \sqrt{3}$ $t \approx 3,147$ $n = 3$ $v = 3\sqrt{3} \approx 5,196$ $m = 5$ $u < 5 < v$ $\sqrt{2} < \frac{5}{3} < \sqrt{3}$

D'où :

THEOREME : Le cardinal de l'ensemble des nombres irrationnels est égal au cardinal de l'ensemble des nombres rationnels.

$$\text{Card } \mathbb{Q} = \text{Card } \overline{\mathbb{Q}}$$

Ce qu'il fallait démontrer !

NOTE IMPORTANTE : un nombre réel n'a pas de successeur et donc la proposition « Le successeur d'un rationnel est un irrationnel et réciproquement » n'a pas de sens. Il existe toujours une infinité de nombres réels entre 2 réels distincts donnés, et non pas un seul.

Puisque $\text{Card}(\mathbb{Q}) = \text{Card}(\mathbb{Q}^+) + \text{Card}(\mathbb{Q}^{*-}) = 2 \text{Card}(\mathbb{Q}^+)$ et $\text{Card}(\mathbb{Q}) = \text{Card}(\mathbb{Q}^+)$ on a l'équivalence :

$$\text{Card}(\mathbb{Q}) = 2 \text{Card}(\mathbb{Q}^+)$$

Et donc puisque $\text{Card}(\mathbb{R}) = \text{Card}(\mathbb{Q}) + \text{Card}(\overline{\mathbb{Q}}) = 2 \text{Card}(\mathbb{Q}^+) + \text{Card}(\mathbb{Q}^+) = 3 \text{Card}(\mathbb{Q}^+)$ et $\text{Card}(\mathbb{Q}) = \text{Card}(\mathbb{N})$:

$$\text{Card}(\mathbb{R}) = \text{Card}(\mathbb{N})$$

Quod erat demonstrandum !

IV) PARADOXE DE LA «SOUS-DÉNOMBRABILITÉ» DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES PREMIERS. INVALIDATION DE LA CONSISTANCE DE LA NOTION D'EQUIPOTENCE COMME CRITÈRE DE COMPARAISON DES CARDINAUX TRANSFINIS. IDENTITÉ DU CARDINAL DE \mathbb{N} AVEC CELUI DE L'ENSEMBLE DE SES PARTIES.

L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers n'est pas fini. En effet — argument d'Euclide — supposons qu'il l'est, et soit $p_1, p_2 \dots p_i \dots p_n$ les n nombres premiers possibles. Le nombre $m = 1 + (p_1 \times p_2 \times \dots p_i \times \dots p_n)$ n'est divisible par aucun d'eux, et donc, soit il est premier lui-même, soit il est multiple de nombres premiers autres que ceux qui figuraient dans l'ensemble de départ, et donc dans tous les cas il manque au moins un nombre premier dans celui-ci.

Il est possible de coder un élément E de l'ensemble S des parties de l'ensemble des nombres premiers par le biais d'une chaîne de bits : $b_1 b_2 \dots b_i \dots b_n \dots$ qui est telle que $b_i = 0$ si $P_i \notin E$ et $b_i = 1$ si $P_i \in E$

Il est possible d'associer de manière biunivoque à un tel code le nombre entier $n = P_1^{b_1} \times P_2^{b_2} \times \dots P_i^{b_i} \dots \times P_n^{b_n} \dots$

Exemple : à la partie $E = \{2, 7\}$ on associe le produit $n = 2^1 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^1 \times 11^0 \times 13^0 \times 17^0 \dots = 14$

Donc, L'ensemble S des parties de l'ensemble des nombres premiers est isomorphe au sous-ensemble F des nombres entiers dont la puissance des facteurs est au plus égal à 1. Il suit que l'on a $\text{Card } S = \text{Card } F$: L'association considérée est bijective et donc ils sont équipotents.

En désignant par π le cardinal de \mathcal{P} , puisque de manière conforme à la théorie du transfini le cardinal de \mathcal{P} est inférieur celui de l'ensemble de ses parties on a $\pi < \text{Card } S = \text{Card } F$

Et comme F est un sous-ensemble de l'ensemble des entiers on a $\text{Card } F \leq \aleph_0$

Et donc $\pi < \aleph_0$ Ce à quoi on voulait arriver !

Premier niveau de paradoxe : \aleph_0 n'est-il plus le plus petit des cardinaux transfinis, et dans le cas contraire en existe-t-il un ?

Second niveau de paradoxe : ce résultat est en contradiction avec la théorie des nombres premier ; il faudrait :

$$\pi \sim \frac{\aleph_0}{\ln \aleph_0} \gg \log_2 \aleph_0$$

Soit en termes d'équivalence du transfini $\pi = \aleph_0$ soit encore :

$$\aleph_0 = 2^\pi = 2^{\aleph_0}$$

Et donc, une fois de plus, le cardinal \aleph_0 de \mathbb{N} est égal au cardinal 2^{\aleph_0} de l'ensemble de ses parties, si tant est que la notion de cardinalité conserve encore un quelque sens dans le cas du transfini à ce stade.

V) INVALIDATION DE L'ARGUMENT DIAGONAL DE CANTOR DANS LE CAS DU DENOMBREMENT DES SUITES DE LANCÉS SUCCESSIFS D'UNE PIÈCE DE MONNAIE. EXPLICATION CONNEXE DU PARADOXE DE SAINT-PETERSBOURG

A ce stade, il reste, pour éradiquer toute contestation résiduelle, à traiter le cas du dénombrement du nombre de possibilités de suites de lancés successifs d'une pièce de monnaie, lequel diffère du point de vue formel de celui des nombres, et nécessite donc d'être abordé in fine, pour éradiquer tout ilot de résistance.

On considère toutes les séquences possibles de lancer d'une pièce de monnaie, et, on remplit le tableau de Cantor en portant désormais dans chacune des lignes la séquence correspondant à une expérience particulière de lancers successifs. En notant par **P** l'événement « La pièce est tombée sur pile » et par **F** l'évènement « La pièce est tombée sur face », le tableau sera du type :

PPFFFPFPFPFFFFPFFFFP ...
FFFPFFFFFPFFFFFPFP ...
PPFFPPPPPPFFFFFPFFFFP ...

..

On reprend le raisonnement de Cantor : Si l'on considère le tirage qui correspond à la diagonale du tableau, ici **PFF ...** puis le tirage que l'on obtient en remplaçant dans ce tirage les piles par des faces, et les faces par des piles, soit ici **FPP ...** il apparaît que ce tirage n'appartient pas aux lignes du tableau,

Or, ici, contrairement au cas des écritures de nombre, il est licite de considérer que le tableau puisse être carré, et d'autre part chacun des tirages dispose d'une et une seule écriture.

Toutefois le contre-argument le plus subtil, et qui à ce titre devrait échapper à bien des lecteurs est le suivant :

Si dans le cadre de l'écriture positionnel d'un nombre chaque chiffre est à sa place, il n'en va pas de même dans le cadre de la description d'une suite de lancers.

Si $e_{i,1} e_{i,2} \dots e_{i,i} e_{i,i+1} \dots e_{i,n} e_{i,n+1} \dots$ est un tirage aléatoire, le sous-tirage de rang $j > 1$: $e_{i,j} e_{i,j+1} \dots e_{i,n} e_{i,n+1} \dots$ auquel assistent ceux qui sont arrivés en retard dans la salle de jeu l'est également, et rien ne s'oppose à ce que ce sous-tirage corresponde au tirage diagonal initial : bref l'argument diagonal ne tient plus, du fait de l'absence de pertinence rigoureuse des différents indices.

D'autre part, si la pièce est équilibrée alors parmi l'infinité des tirages a priori possibles sans tenir compte de la loi des grands nombres, il en est une infinité qui sont incompatibles avec cette loi :

PARADOXE DE SAINT-PETERSBOURG :

Pierre et Paul joue à pile ou face avec une pièce supposée équilibrée et la règle est la suivante :

Si au premier lancer la pièce tombe sur pile, Pierre donne **1 €** à Paul et on procède à un nouveau lancer.

Si au second lancer la pièce tombe à nouveau sur pile, Pierre donne **2 €** à Paul et on procède à un nouveau lancer

...

Si au $n^{\text{ième}}$ lancer la pièce tombe à nouveau sur pile, Pierre donne **2^{n-1} €** à Paul et on procède à un nouveau lancer.

Dès que la pièce tombe sur face, le jeu s'arrête et Paul donne à Pierre une somme convenue à l'avance, par exemple **1 000 000 000 €**.

Paul refuse de jouer, or pourtant son espérance mathématique **E** est infinie. En effet :

$$E = \left(\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 \dots\right) - 1\,000\,000\,000 = -1\,000\,000\,000 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \approx +\infty$$

Le paradoxe de Saint-Pétersbourg n'est pas réellement un paradoxe mais un énoncé de bon sens : si Pile tombe une infinité de fois, alors c'est un événement certain et non plus un événement de probabilité $\frac{1}{2}$

L'hypothèse de l'a priori « le jeu est équilibré » est incompatible avec le constat de l'a posteriori d'un nombre statistiquement significatif de lancer « l'événement pile est très probablement quasi-certain ».

Entre ne pas vouloir à fixer une limite douteuse au nombre maximum d'occurrence successive possible de l'événement pile et ne pas douter de l'équilibre d'une pièce qui tombe par exemple 100 fois sur pile, il y a une limite que peu sont prêts à ne pas franchir.

Toute suite à séquence du type {...} [e1 e2 ... ei ...en] [e1 e2 ... ei ...en] [e1 e2 ... ei ...en] etc. est à proscrire, car d'une part elle favorise statistiquement les séquences de lancers qui lui sont liées, et d'autre part, elle rend nulle la probabilité d'autres séquences qui sont pourtant tout à fait du domaine du possible, ce qui est en contradiction avec la loi des grands nombres.

Conséquence amusante : il n'existe pas de tirage universel, car tout tirage qui comporterait tous les autres tirages en tant que sous tirage comporterait ceux dont il est lui-même un sous-tirage, et, donc il serait son propre sous-tirage, et donc il ferait partie des tirages à séquence proscrit par le paragraphe précédent. La destinée n'est pas une : tant-mieux !

Quand à Paul, il lui faut **30** tirages successifs favorables pour gagner — il est vrai la coquette somme de **7 374 823 €**, voir plus ultérieurement. Il estime toutefois que la probabilité de cette échéance, environ une chance sur un milliard, est beaucoup trop faible au regard du risque financier encouru pour la tenter, et, donc, à défaut d'avoir statistiquement raison, tout au moins est-il raisonnable dans son choix !

CONCLUSION : L'INFINI N'EST PAS UN NOMBRE !!!

J'invite les mécontents à s'adresser à l'académie française plutôt qu'à l'académie des sciences : c'est à elle qu'incombe de régler les éventuelles divergences de points de vue en matière d'interprétation sémantico-linguistique.

On appelle nombre une réalité mathématique abstraite qui est comparable avec d'autres réalités abstraites de même nature par le biais d'une relation d'identification, et d'une relation d'ordre totale.

Alors que : **0 = 0** est licite, $\infty_1 = \infty_2$ ne l'est pas : à quel moment on effectue la comparaison entre deux « valeurs » qui « évoluent » sans cesse chacune de leur côté. De même pour $0 \leq 1$ et non $\infty_1 \leq \infty_2$

